

Utilização da Regra de Compass ou Método de Bowditch e do MMQ no Ajuste de Poligonal Topográfica

Alessandro Salles Carvalho, IFSULDEMINAS - Campus Inconfidentes, ascufpr@gmail.com

Dalto Domingos Rodrigues, Universidade Federal de Viçosa, dalto@ufv.br

Moisés Ferreira Costa, Universidade Federal de Viçosa, moises@ufv.br

João Olympio de Araujo Neto, IFSULDEMINAS - Campus Inconfidentes, olympiouv@yahoo.com.br

RESUMO

Objetivando o mapeamento de áreas agrárias ou urbanas, uma das metodologias que a Engenharia de Agrimensura dispõe é o lançamento de poligonais que servirão de suporte ao levantamento de perímetros e de pontos temáticos. Nestas poligonais são observados ângulos e distâncias horizontais, naturalmente e inevitavelmente eivados de erros observacionais; erros de natureza sistemática, grosseira e aleatória. Há vários métodos para obtenção das coordenadas topográficas; porém, neste trabalho serão analisados somente a regra de compass ou método de *Bowditch* e o Método dos Mínimos Quadrados - MMQ. Ambos proporcionam um ajuste das observações, porém, a principal diferença existente entre eles está na utilização pelo MMQ do modelo estocástico que permite ponderar as observações de modo a torná-las homogêneas. O objetivo deste trabalho é comparar os resultados destes dois diferentes métodos que têm sido empregados por diversos profissionais da Agrimensura ressaltando as vantagens e desvantagens dos mesmos. As coordenadas dos vértices da poligonal topográfica foram estimadas pelos dois métodos. Foi verificada uma semelhança entre os resultados obtidos empregando os dois métodos, porém, o método de Bowditch considera uma uniformidade na precisão dos ângulos e comprimentos dos lados que nem sempre é alcançada em levantamentos. Não permite uma completa avaliação das observações e parâmetros ajustados, tanto de forma numérica quanto gráfica, por meio de elipse dos erros. Com o avanço e acesso maior à informática, não há motivo em se utilizar métodos aproximados sem fundamento estatístico, ou o emprego do MMQ somente em levantamentos de alta precisão.

Palavras Chaves: Poligonal, MMQ, ajuste.

Using the Compass Rule or Bowditch Method and MMQ in the Adjustment Topographic Survey

ABSTRACT

One of the available methodologies to the Survey Engineering to map agrarian or urban areas is to launch traverses that will give support for the surveyed perimeters and others thematic points. In these traverse angles and horizontal distances are observed, inevitably with inherent errors of systematic, coarse and random nature. There is several approaches for obtaining the topographical coordinates; however, in this work only the rule of compass or method of Bowditch and the Least Square Method will be analyzed. Both methods provide the adjustment of observations, however, the main difference between these two methods is in the use of Least Square Method and the Stochastic Model, which allows ponder the observations to make them homogeneous. The aim of this work is to compare the results

of these two different methods, which have been employed by several professionals of Survey Engineering and also emphasize the advantages and disadvantages of both. The simulated data of a traverse have been processed, for both methods. A resemblance between the results obtained by the two methods was observed, however, the Rule of Bowditch considers uniformity in the angle precision and sides' length not always achieved in surveying, not allowing for a complete evaluation of adjusted parameters and observations, either for numerical and graphic form, by means of error ellipses. With the advances and greater access to informatics, there is no reason in using approximate methods without statistical fundamentals, or the use of Least Square Method only in high precision surveys.

Key-words: Adjust, Compensation, Traverse.

1 – INTRODUÇÃO

Após a execução do levantamento topográfico em campo, etapa onde se mede ângulos e distâncias passa-se para etapa de escritório, onde são efetuados cálculos necessários para obtenção das coordenadas dos vértices da poligonal e dos pontos de interesse. Essas coordenadas são referidas a um sistema de eixo cartesiano plano ortogonal (XY), com origem estabelecida a partir do vértice de onde se mediu o azimute inicial.

Em função da área a ser levantada e da finalidade do levantamento esta origem poderá estar no centro da área, sob a superfície física da terra, no nível médio dos mares ou numa posição intermediária. Os eixos X e Y desse sistema coincidem com as direções leste-oeste, norte-sul, respectivamente (Loch e Cordini, 2000).

O levantamento dos pontos de apoio da poligonal pode ser feito conjuntamente

com os pontos temáticos ou em separado. Entende-se por conjuntamente as observações de ângulos e distâncias dos lados da poligonação e dos pontos irradiados. Já em separado, procede-se o levantamento de toda a poligonal, posteriormente reocupam-se os pontos de apoio e levantam-se os pontos temáticos. A vantagem em realizar o primeiro procedimento está na agilidade em que se realiza o levantamento, não precisando reocupar os pontos de apoio para determinação das irradiações.

Os erros de medida não permitem que haja um fechamento geométrico correto na poligonal, portanto é necessário que se faça uma distribuição dos erros nas observações. Há vários métodos para a distribuição destes erros, no entanto, neste trabalho será abordado o Método dos Mínimos Quadrados - MMQ e a regra de *compass* ou *Bawditch*.

O método de **Bowditch** é um método mundialmente usado, porém não é um método rigoroso de ajustamento. Para sua utilização, considera-se que todas as observações têm igual peso e assume-se a não correlação entre elas. Este método produz bom resultados quando as distâncias e ângulos são medidos com equivalente precisão (Mikhail & Gracie 1981; Cooper, 1987).

O princípio fundamental do MMQ diz que a soma dos quadrados dos resíduos seja mínimo, isto é: $\phi = \mathbf{V}^T \mathbf{P} \mathbf{V} = \text{mínimo}$ (Gemael, 1994). Sua aplicação pressupõe a presença somente dos inevitáveis erros aleatórios, a necessidade de o modelo matemático funcional ser linear e da presença de observações superabundantes.

Pretende-se neste trabalho aplicar as metodologias de compensação e ajustamento de poligonais topográficas bem como comparar os resultados desses dois diferentes métodos que têm sido empregados por diversos profissionais da engenharia de levantamentos.

2 – METODOLOGIA

Para a realização deste trabalho foi simulada uma poligonal fechada (com controle angular e linear) que se encontra ilustrada na figura 1. Os valores das observações a serem compensadas ou ajustadas estão indicados na figura 1 e fornecidos na tabela 1 respectivamente. Nesta poligonal são conhecidas as coordenadas (fixas) dos pontos $M1 = (950, 215; 1042, 282)m$ e $P1 = (1000, 000; 1000, 000)m$, bem como o Azimute $Az_{M1-P1} = 130^{\circ}20'28''$.

A figura 1 ilustra a poligonal simulada onde estão indicados os ângulos e distâncias (observações).

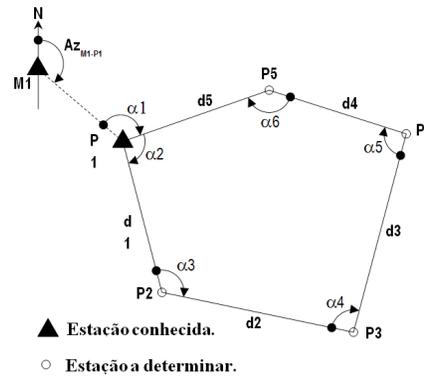


Figura 1: croqui da poligonal topográfica.

Na tabela 1 estão presentes os valores dos ângulos horários, distâncias entre os vértices da poligonal topográfica ilustrada na figura 1 e, precisões das observações.

Tabela 1. Observações e desvios padrão

| Observação | Ângulo | Sigma (m) | Observação | Distância (m) | Sigma(m) |
|------------|------------|-----------|------------|---------------|----------|
| a1 | 120°26'35" | 1" | d1 | 90,714 | 0,002 |
| a2 | 94°36'47" | 1" | d2 | 114,413 | 0,003 |
| a3 | 116°16'24" | 1" | d3 | 119,469 | 0,003 |
| a4 | 93°18'09" | 1" | d4 | 84,073 | 0,002 |
| a5 | 92°35'20" | 1" | d5 | 90,683 | 0,002 |
| a6 | 143°13'15" | 1" | | | |

2.1 - REGRA DE COMPASS OU MÉTODO DE BOWDITCH

Dentre os métodos analíticos de processamento dos dados observados, o de *Bowditch* compensa o erro linear distribuindo-o proporcionalmente aos comprimentos dos lados da poligonal e a distribuição do erro angular igualmente entre os vértices da poligonal (Cooper, 1987; Wolf & Ghilani, 2006).

2.1.1 – Erro e compensação do erro angular

O erro angular cometido na poligonal, considerando-se ângulos horários internos pode ser calculado pela equação (1). A correção a ser aplicada nos ângulos horários da poligonal pode ser feita dividindo-se o erro angular pelo número de estações (vértices), conforme equação (2). De posse da correção a ser aplicada em cada vértice, obtém-se o ângulo compensado do erro angular. O ângulo corrigido é dado pela equação (3).

$$e_a = \sum_{i=1}^n \alpha_i - 180(n - 2); \quad (1)$$

$$C_{\alpha_i} = -\frac{e_a}{n}; \quad (2)$$

$$\alpha_{cor_i} = \alpha_{obs_i} + C_{\alpha_i}. \quad (3)$$

Onde:

e_a : erro angular;

n : n.º de vértices da poligonal;

C_{α_i} : correção a ser aplicada em cada ângulo da poligonal;

α_{cor_i} : ângulo corrigido formado entre os alinhamentos.

2.1.2 - Cálculo dos azimutes dos alinhamentos

Os azimutes corrigidos dos alinhamentos da poligonal podem ser obtidos por meio da equação (4), ou seja, o azimute do alinhamento em questão é igual ao alinhamento anterior mais o ângulo horário da estação ocupada.

$$Az_n = Az_{n-1} + \alpha_{cor.} \quad (4)$$

Onde:

Az_n : azimute do alinhamento que se deseja calcular;

Az_{n-1} : azimute anterior ao qual se deseja calcular.

Para o cálculo do azimute deve-se realizar a seguinte análise:

Se $Az_{n-1} + \alpha_{cor.} < 180^0 \rightarrow +180^0$;

Se $Az_{n-1} + \alpha_{cor.} > 180^0 \rightarrow -180^0$;

Se $Az_{n-1} + \alpha_{cor.} > 540^0 \rightarrow -540^0$.

2.1.3 - Coordenadas relativas

As coordenadas relativas de um alinhamento ij são dadas pelas projeções (ΔX e ΔY) dos alinhamentos nos eixos $E(X)$ e $N(Y)$ conforme se pode observar na figura 2. As projeções são calculadas em função das distâncias e azimutes corrigidos dos alinhamentos conforme equações (5) e (6).

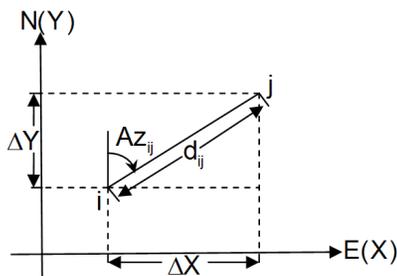


Figura 2: projeções ΔX e ΔY do alinhamento ij .

$$\Delta X_{ij} = d_{ij} \cdot \text{sen} Az_{ij}; \quad (5)$$

$$\Delta Y_{ij} = d_{ij} \cdot \text{cos} Az_{ij}. \quad (6)$$

Onde:

i : 1, ..., n ;

d_{ij} : distâncias entre os vértices;

ΔX_{ij} : abscissa relativa, isto é, projeção do alinhamento no eixo $E(X)$;

ΔY_{ij} : ordenada relativa, isto é, projeção do alinhamento $N(Y)$.

2.1.4 - Cálculo do erro linear

Pode-se considerar o erro linear de fechamento como sendo a distância que faltou ou sobrou para o fechamento geométrico (linear) da poligonal. Este erro pode ser obtido a partir dos erros lineares nos eixos X e Y . Para determinar o erro linear de fechamento no eixo X devem-se somar todas as projeções dos alinhamentos do eixo X . O mesmo deve ser feito para o eixo Y .

Deve-se verificar se o erro linear de fechamento satisfaz o critério de tolerância pré-estabelecido (dado em função do tipo de levantamento ou especificado para determinado projeto). Na poligonal proposta, de cinco vértices, os erros lineares nos eixos X e Y ficariam na forma:

$$e_x = \Delta X_{12} + \Delta X_{23} + \Delta X_{34} + \Delta X_{45} + \Delta X_{51}, \quad \text{ou}$$

$$\text{na forma geral, } e_x = \sum_{i=1}^n \Delta X_{i,i+1}; \quad (7)$$

$$e_y = \Delta Y_{12} + \Delta Y_{23} + \Delta Y_{34} + \Delta Y_{45} + \Delta Y_{51}, \quad \text{ou na}$$

$$\text{forma geral, } e_y = \sum_{i=1}^n \Delta Y_{i,i+1}. \quad (8)$$

*Quando i for cinco ultimo ponto da poligonal, entenda $i+1$ como sendo o vértice inicial.

O erro linear de fechamento é dado por:

$$e_L = \sqrt{e_x^2 + e_y^2}. \quad (10)$$

Onde:

$i: 1, \dots, n;$

e_x : erro linear de fechamento no eixo X;

e_y : erro linear de fechamento no eixo Y;

e_L : erro linear de fechamento.

2.1.5 – Cálculo da precisão relativa

O erro linear de fechamento (e_L) é absoluto, isto é, não se relaciona comparativamente com outro valor. Para verificar se esse erro (e_L) é aceitável, se faz necessário compará-lo com o valor de tolerância. A dimensão do trabalho é dada pelo perímetro (P). A precisão relativa da poligonal pode ser obtida por (11) e (12).

$$e_r = p_r = \frac{e_L}{P}; \quad (11)$$

$$1: M. \quad (12)$$

Onde:

$M = \frac{P}{e_L}$: razão entre o perímetro da poligonal e o erro linear total de fechamento;

$e_r = p_r$: erro relativo ou precisão relativa.

A interpretação de (12) pode ser feita da seguinte: comete-se um erro de um metro em M metros de perímetro da poligonal.

2.1.6 – Distribuição do erro de fechamento pela regra de *compass* ou método de *Bowditch*

De acordo com Wolf & Ghilani (2006) o método de *Bowditch* “ajusta” as abscissas e ordenadas proporcionalmente aos comprimentos dos lados da poligonal. Ressaltam que este método não é tão rigoroso quanto ao ajustamento pelo MMQ, mas resulta em uma distribuição lógica dos erros de fechamentos, pois quanto maior o lado da poligonal, maior será a correção a ser aplicada.

As correções a serem aplicadas às co-

ordenadas relativas são calculadas pelas expressões (13) e (14). Deve-se observar que os sinais algébricos das correções são contrários aos respectivos erros de fechamento.

Correções a serem aplicadas às projeções no eixo X

$$C_{\Delta X_{ij}} = -\frac{e_L}{P} \times d_{ij};$$

(explicar os elementos – idem para todas as equações) (13)

correções a serem aplicadas às projeções no eixo Y

$$C_{\Delta Y_{ij}} = -\frac{e_L}{P} \times d_{ij}; \quad (14)$$

coordenadas relativas corrigidas são:

$$\Delta X_{ij\text{corrigido}} = \Delta X_{ij} + C_{\Delta X_{ij}}; \quad (15)$$

$$\Delta Y_{ij\text{corrigido}} = \Delta Y_{ij} + C_{\Delta Y_{ij}}. \quad (16)$$

2.2.3.1 - Coordenadas absolutas

As coordenadas do vértice que se deseja determinar são iguais à coordenada do vértice anterior mais as projeções (ΔX_{ij} , ΔY_{ij}) do alinhamento formado entre estes pontos.

$$X_n = X_{n-1} + \Delta X_{ij}; \quad (17)$$

$$Y_n = Y_{n-1} + \Delta Y_{ij}. \quad (18)$$

Onde:

X_n : abscissa absoluta do vértice a determinar;

Y_n : ordenada absoluta do vértice a determinar;

X_{n-1} : abscissa absoluta do vértice anterior a ser determinado;

Y_{n-1} : ordenada absoluta do vértice anterior a ser determinado;

ΔX_{ij} : abscissa relativa;

ΔY_{ij} : ordenada relativa.

2.2 – Ajustamento de observações pelo Método dos Mínimos Quadrados

É importante ressaltar que só tem sentido em falar em ajustamento quando existem observações superabundantes. Apresenta-se neste trabalho um passo a passo para a realização do ajustamento de uma poligonal topográfica com uso do modelo paramétrico do MMQ.

1º Passo: estudar o problema de forma a determinar os modelos matemáticos funcionais, ou seja, as equações de observação que envol-

ve os parâmetros. Estas equações de observação assumem a forma dada pela equação (19):

$$\mathbf{L}_a = \mathbf{F}(\mathbf{X}_a). \quad (19)$$

Onde:

\mathbf{L}_a : vetor ($n \times 1$) das observações ajustadas;

\mathbf{F} : modelo matemático funcional;

\mathbf{X}_a : vetor ($u \times 1$) dos parâmetros ajustados.

Normalmente em uma poligonal topográfica se observam ângulos e distâncias, desta forma, para facilitar o entendimento, têm-se os seguintes modelos funcionais que representam matematicamente estas observações.

$$5\hat{1}2 = \alpha_1 = Az_{12} - Az_{15} = \text{atan}\left(\frac{X_2 - X_1}{Y_2 - Y_1}\right) - \text{atan}\left(\frac{X_5 - X_1}{Y_5 - Y_1}\right); \quad (20)$$

$$d_{12} = \left[(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (21)$$

Os modelos (20) e (21) representam respectivamente equações de ângulo e distância (observações) que envolvem os parâmetros (\mathbf{X}). Pode-se avaliá-las *a priori* utilizando-se dos parâmetros aproximados (\mathbf{X}_0).

É necessário que todas as observações de ângulos e respectivas precisões sejam transformadas em radianos para que haja compatibilidade de unidades.

2º Passo: obter os valores aproximados para os parâmetros - (\mathbf{X}_0)

Para o cálculo dos parâmetros aproximados de uma poligonal topográfica, basta que se conheçam as coordenadas de um ponto de partida, de um azimute inicial, dos ângulos horários formado entre os alinhamentos e a distância dos alinhamentos da poligonal.

De maneira geral, os parâmetros aproximados podem ser obtidos com as equações (22) e (23).

$$X_n = X_{n-1} + d_{ij} \times \text{sen}Az_{ij}; \quad (22)$$

$$Y_n = Y_{n-1} + d_{ij} \times \text{cos}Az_{ij}. \quad (23)$$

Por exemplo, a abscissa X2 do ponto 2 pode ser calculada somando a abscissa X1 do ponto 1 (partida) mais o produto da distância entre os pontos P1 e P2 pelo seno do azimute deste alinhamento.

3º Passo: montar a matriz dos pesos -

$$\mathbf{P} = \sigma_0^2 \mathbf{C}_{LB}^{-1}$$

Para que se possa montar a matriz dos pesos (\mathbf{P}) é necessário o conhecimento das precisões com que foram obtidas as observações de ângulos e distâncias. Caso as observações não tenham sido obtidas por medidas repetidas é comum a consideração da precisão nominal do instrumento de medição. Na grande maioria das vezes a matriz \mathbf{P} será diagonal devido à inexistência ou não consideração da covariância entre as observações.

O sigma zero *a priori* σ_0^2 , ou fator de variância de peso *a priori* pode ser arbitrário,

geralmente assume-se o valor igual à unidade.

A Matriz Variância - Covariância das Observações - MVC (C_{LB}) tem em sua diagonal principal os valores de variância e fora desta, valores de covariância, caso existam correlação entre as observações.

4º passo: encontrar o vetor das observações aproximadas $L_0 = F(X_0)$

Este vetor é encontrado substituindo os valores aproximados encontrados no passo 2 nas equações de observações que envolvem os parâmetros. As equações (20) e (21) mostram um exemplo destas equações de distância e ângulo. Para o cálculo do valor angular, existe a necessidade de se proceder à análise de quadrante para determinar cada azimute e verificar se a diferença entre estes é negativa e, caso seja, deve-se adicionar 360° ao valor negativo.

5º passo: encontrar o vetor dos termos independentes $L = L_b - L_0$

O vetor L dos termos independentes é resultado da diferença do vetor das observações brutas, provenientes de campo e o vetor das observações aproximadas obtidas no 4º passo.

6º passo: montagem da matriz *design* ou matriz A $A = \left. \frac{\partial F}{\partial X_a} \right|_{X_a=X_0} A$

A matriz A é obtida por meio das derivadas parciais de cada equação de observação em relação aos parâmetros ajustados. Para que os elementos desta matriz possam ser avaliados devem-se substituir os valores ajustados *a priori* desconhecidos pelos parâmetros aproximados obtidos no passo 2.

7º passo: resolução do sistema de equações normais

O modelo matemático das equações de observação, linearizados é dado pela equação (24).

$$AX - L = V \quad (24)$$

V : vetor dos resíduos das observações, obtido do ajustamento para corrigir as observações;
 X : é o vetor incógnito das correções, a serem aplicadas aos parâmetros aproximados, para a obtenção dos parâmetros ajustados, ou seja, coordenadas dos pontos da poligonal ajustada.

Aplicando o critério dos mínimos quadrados (o somatório dos quadrados dos resíduos deve ser mínimo) na equação (24) e após algumas operações algébricas e matriciais, obtém os sistemas de equações normais do pelas equações (25) e (26) e a solução única do sistema de equações normais é dada pela equação (27).

$$N = A^T P A \quad (25)$$

$$U = A^T P L \quad (26)$$

$$X = N^{-1} U \quad (27)$$

9º passo: encontrar o vetor dos resíduos V
 O vetor dos resíduos é utilizado para o cálculo das observações ajustadas e para o cálculo do sigma zero *a posteriori*.

$$V = AX - L \quad (28)$$

10º passo: cálculo do fator de variância *a posteriori*.

O fator de variância *a posteriori* ($\hat{\sigma}_0^2$) é um valor que deve ser confrontado com o fator de variância *priori* (σ_0^2), por meio de teste de hipótese com o uso da estatística qui-quadrado. O fator de variância *a posteriori* é dado por (29).

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^T P V}{n - u} \quad (29)$$

Onde:

n : número de equações de observações;
 u : número de parâmetros;
 $n-u$: graus de liberdade.

Caso seja detectada diferença estatística no nível de significância $\alpha\%$ deve-se verificar se há problemas no ajustamento. De acordo com Gemael (1994) a forma quadrática $\frac{\mathbf{V}^T \mathbf{P} \mathbf{V}}{\sigma_0^2}$ tem distribuição χ^2 (qui-quadrado) com s graus de liberdade, isto é: $\frac{\mathbf{V}^T \mathbf{P} \mathbf{V}}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(s)$.

Teste de hipótese:

$$H_0 : \hat{\sigma}_0^2 = \sigma_0^2$$

$$H_1 : \hat{\sigma}_0^2 \neq \sigma_0^2$$

Nível de significância: $\alpha = 5\%$

Teste estatístico:

$$\chi_c^2 = \frac{\hat{\sigma}_0^2 (n-u)}{\sigma_0^2} \quad (30)$$

Para que a hipótese nula seja aceita o qui-quadrado calculado deverá estar dentro do intervalo de aceitação:

$$\chi_{\alpha/2; (n-u)}^2 \leq \chi_c^2 \leq \chi_{1-\alpha/2; (n-u)}^2 \quad (31)$$

Os valores teóricos podem ser calculados com auxílio de uma tabela de distribuição qui-quadrado. Para isso, basta entrar com o número do grau de liberdade e o nível de significância α .

11º passo: cálculo da MVC dos parâmetros ajustados.

A MVC dos parâmetros estimados dada pela equação (32) é uma matriz completa e simétrica que permite a determinação da precisão com que os parâmetros foram estimados. Na diagonal principal encontram-se valores de variância e fora da diagonal, valores de covariância.

$$\mathbf{C}_{\mathbf{x}_a} = \hat{\sigma}_0^2 \mathbf{N}^{-1} \quad (32)$$

12º passo: cálculo das observações ajustadas dada pela equação (33).

$$\mathbf{L}_a = \mathbf{L}_b + \mathbf{V} \quad (33)$$

13º passo: cálculo da MVC das observações ajustadas.

$$\mathbf{C}_{\mathbf{L}_a} = \hat{\sigma}_0^2 \mathbf{A} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T \quad (34)$$

2.2.1 - Elipse de erro

De acordo com Schofield & Breach (2007), as elipses de erro são um forma gráfica de expressar as incertezas posicionais. A elipse de erro padrão e seus elementos podem ser vistos na figura 3. Na hipótese de distribuição normal dos erros, a interpretação geométrica da elipse em sua forma padrão pode ser entendida como uma região de 39,4% de probabilidade de que a posição estimada para o ponto esteja dentro da elipse centrada na “posição verdadeira”. Para obtenção uma região de probabilidade de 95%, basta multiplicar o semi-eixo maior (u) e menor (v) por um fator de 2,447.

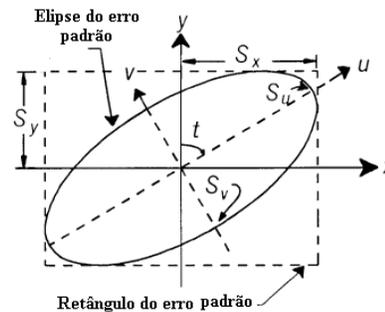


Figura 3: Elipse de erro e seus elementos.
Fonte: adaptado de (Ghilani & Wolf, 2006).

A orientação da elipse do erro (t) pode ser obtida por:

$$2t = \tan^{-1} \left(\frac{2 \times \sigma_{xy}}{\sigma_y^2 - \sigma_x^2} \right) \quad (35)$$

Para o cálculo da orientação da elipse (t), ângulo que o eixo u faz com o eixo y , inicialmente deve-se proceder à análise de quadrante como se fosse calcular o azimute de um alinhamento qualquer e, posteriormente divide-se o valor encontrado por 2.

O semi- eixo maior da elipse é dado por:

$$\sigma_u^2 = \frac{1}{2} \left[\sigma_y^2 + \sigma_x^2 + \left\{ (\sigma_y^2 - \sigma_x^2)^2 + 4\sigma_{xy}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \right]; \quad (36)$$

o semi- eixo menor da elipse é dado por:

$$\sigma_v^2 = \frac{1}{2} \left[\sigma_y^2 + \sigma_x^2 - \left\{ (\sigma_y^2 - \sigma_x^2)^2 + 4\sigma_{xy}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \right]. \quad (37)$$

3 - RESULTADOS

Foi realizado a compensação e o ajustamento utilizando o método de *Bowditch* e o MMQ, onde na poligonal simulada foi encontrado um erro angular de -5 segundos de arco. O erro linear na projeção X foi de 0,001 m e em Y de 0,007 m, o erro linear de fechamento foi de 0,007 m. e com uma precisão relativa de 1: 73.613, ou seja, erra-se um metro em 73.613 metros de perímetro.

O numero de equações de observa-

ções são onze: seis equações de ângulo e cinco equações de distâncias (1° passo), o que resulta em três graus de liberdade. Realizado o ajustamento foi encontrado variância a *posteriori* igual a 0,557. Assim, o qui-quadrado calculado vale 1,674. Os valores teóricos obtidos com auxílio de tabela de distribuição qui-quadrado são respectivamente: limite inferior 0,22 e limite superior 9,35. O qui-quadrado calculado atende a condição estabelecida em (31) e desta forma pode-se dizer que o fator de variância a *priori* é estatisticamente igual ao fator de variância a *posteriori* a 5% de significância.

Na tabela2 encontram-se os valores das coordenadas obtidas no processo de compensação pelo método de *Bowditch* e no ajustamento pelo MMQ. As precisões das coordenadas estimadas neste ultimo também são apresentadas bem como a diferença entre as coordenadas estimadas nos dois processos.

Tabela 2. Coordenadas estimadas, diferenças entre elas e desvios.

| Ponto | MMQ (X) (m) | Sigma (X) (m) | MMQ (Y) (m) | Sigma (Y) (m) | BOW (X) (m) | BOW (Y) (m) | MMQ- BOW (X) (mm) | MMQ- BOW (Y) (mm) |
|-------|----------------|---------------------|----------------|---------------------|----------------|----------------|-------------------------|-------------------------|
| P1 | 1000,000 | FIXO | 1000,000 | FIXO | 1000,000 | 1000,000 | 0 | 0 |
| P2 | 1022,870 | 0,003 | 912,216 | 0,001 | 1022,870 | 912,215 | 0 | 1 |
| P3 | 1134,918 | 0,004 | 889,067 | 0,004 | 1134,917 | 889,068 | 1 | -1 |
| P4 | 1165,784 | 0,002 | 1004,479 | 0,005 | 1165,785 | 1004,479 | -1 | 0 |
| P5 | 1085,630 | 0,001 | 1029,847 | 0,002 | 1085,631 | 1029,847 | -1 | -1 |

Foi observado que quando se fixa ponto P1 no processo de ajustamento pelo MMQ as maiores incertezas posicionais encontram-se em pontos mais distantes deste. Assim, pode-se inferir que a forma e orientação da elipse absoluta dependem do ponto Datum.

Na figura 4 se pode observar a forma e orientação das elipses de confiança (95%) em cada ponto da poligonal.

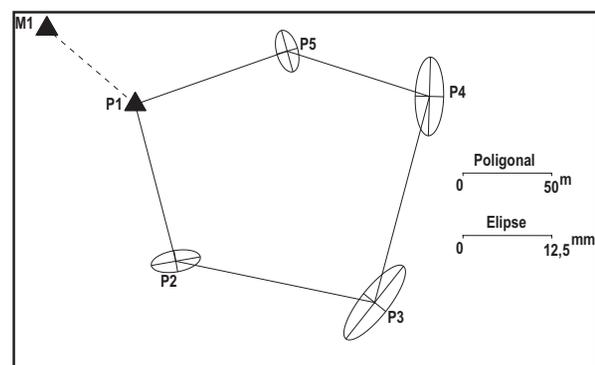


Figura 4: Poligonal simulada ajustada pelo MMQ e representação gráfica das incertezas posicionais por meio das elipses de confiança com 95% de probabilidade.

Os parâmetros, orientação, semi-eixo maior e semi-eixo menor das elipses de erro estão ilustrados na figura (4) e disponíveis na tabela 3.

Tabela 3. Elementos da elipse de Confiança com 95% de probabilidade

| Vértices | Orientação (t) (gms) | Semi – eixo maior (u) (m) | Semi – eixo menor (v) (m) |
|----------|----------------------------|---------------------------------|---------------------------------|
| P2 | 80°07'58" | 0,007 | 0,003 |
| P3 | 38°33'59" | 0,013 | 0,004 |
| P4 | 01°31'30" | 0,011 | 0,004 |
| P5 | 80°07'58" | 0,006 | 0,003 |

4 – DISCUSSÃO E CONCLUSÕES (CONCLUSÕES)

Pode-se observar que as coordenadas obtidas em ambos os métodos apresentaram discrepâncias na ordem milímetros, mas podem chegar a centímetros. Logo o método de *Bowditch* pode ser empregado em trabalhos de topografia que não exijam um controle de qualidade rigoroso.

O método de *Bowditch* é de fácil aplicação, podendo ser facilmente utilizado empregando calculadoras programáveis ou em planilhas eletrônicas (Calc, Excel, etc.). Este método foi desenvolvido considerando que os ângulos e distâncias são obtidos com precisões equivalentes, e a não existência de correlação entre as observações.

A distribuição de o erro angular é realizada de maneira equivalente em todos os vértices da poligonal; já a distribuição do erro linear é feito de maneira proporcional ao comprimento dos lados, ou seja, quanto maior o lado maior correção a ser feita na coordenada relativa.

Foi observado que este método apesar de fornecer resultados satisfatórios, não proporciona elementos para uma análise estatística mais elaborada, como a de controle de qualidade, i.e., não permite a utilização de

metodologias para detecção de erros grosseiros (*blunders*) e *outliers*.

No caso do ajustamento pelo MMQ (caso paramétrico), permite-se a inserção das precisões e correlações entre as observações. Permite obter solução única, ou seja, o valor mais provável para a variável aleatória (parâmetros).

O MMQ permite obter a precisão dos parâmetros estimados, observações ajustadas e os resíduos estimados. Assim, pode-se associar à posição a precisão com que este valor foi estimado. Outra maneira de expressar a precisão da posição de forma não numérica pode ser feito por meio das elipses do erro ou de confiança, como ilustrado na figura (4).

Na figura (4) observam-se as precisões por meio da elipse do erro em todos os vértices estimados. Nota-se que a precisão vai diminuindo à medida que se afasta do ponto de Datum. Isto pode ser observado no vértice mais distante do ponto inicial.

Com o avanço e acesso maior à informática, não há motivo em se utilizar métodos aproximados sem fundamento estatístico, ou o emprego do MMQ somente em levantamentos de alta precisão.

6 – REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

COOPER, M: **Control surveys in civil engineering**. London, Nichols Pub Collins. 1987. 381p.

COMASTRI, J: **Topografia – Planimetria**. 2 ed. Viçosa: UFV, 1992. 336p.

DALMOLIN, Q.: **Ajustamento por Mínimos Quadrados** – 2 ed. Curitiba. 2004. 175p.

GEMAEL, C.: **Introdução ao ajustamento de observações - aplicações geodésicas**.

Curitiba-PR: UFPR, 2004. 319p.

LOCH, C; CORDINI, J: **Topografia Contemporânea - Planimetria**. 2 ed. Florianópolis. UFSC. 2000. 311p.

MIKHAIL, E, M; GRACIE, G.: **Analysis and Adjustment of Survey Measurements.** Van Nostrand Reinhold. 1981.368p.

SCHOFIELD, W; BREACH, M. **Engineering Surveying.** 6th Ed. Oxford, UK. Elsevier, 2007.637p.

SILVA, A. S.: **Ajustamento Pelos Mínimos Quadrados em Ciências Geodésicas.**Viçosa-MG: UFV, 2002.87p.