

COMPARAÇÃO DOS AZIMUTES DE PARTIDA E CHEGADA SOBRE O ELIPSÓIDE DE REVOLUÇÃO E NO MODELO ESFÉRICO

Julierme Wagner da Penha
Antônio Santana Ferraz
Universidade Federal de Viçosa - UFV
juliermewagner@yahoo.com.br; ferraz@ufv.br

RESUMO

Neste estudo procurou-se obter uma rotina para o cálculo de azimutes de partida e chegada entre dois pontos (uma rota) da superfície terrestre a partir de suas coordenadas geográficas utilizando-se como modelo matemático da Terra, o elipsóide de revolução e ao mesmo tempo, comparar os valores obtidos para os azimutes entre os mesmos pontos calculados sobre o modelo esférico. O conhecimento da direção entre dois pontos situados na superfície terrestre interessa a vários profissionais, especialmente aos engenheiros agrimensores e cartógrafos. A Terra não é perfeitamente esférica, sendo a sua forma real segundo Carl Friedrich Gauss, uma figura conhecida como “geóide”, obtida pelo prolongamento do nível médio do mar, homogêneo e supostamente em repouso, através dos continentes. Sendo o geóide uma figura de difícil tratamento matemático, outros sólidos geométricos são utilizados para representação da Terra, notadamente o elipsóide de revolução que melhor ajusta-se a forma da Terra. Para esta análise foram selecionadas algumas cidades distribuídas sobre o globo terrestre de maneira a formar rotas em várias direções e magnitudes possibilitando a análise de resultados em várias situações, para se ter uma maior e melhor abrangência experimental. Os cálculos de azimutes entre dois pontos sobre o elipsóide de revolução envolvem o conhecimento da geometria analítica com vetores e planos. Já os cálculos de azimutes na superfície esférica utilizam-se das fórmulas da trigonometria esférica clássica. Os resultados obtidos para o cálculo dos azimutes utilizando-se os dois modelos são apresentados em valores absolutos e relativos.

ABSTRACT

In this study tried to obtain a routine for the calculation of azimuth of departure and arrival between two points (a route) of the earth's surface from their geographical coordinates using a mathematical model of the Earth as the ellipsoid of revolution and at the same time, comparing the values obtained for the azimuth among the same points calculated on the spherical model. Knowledge of the path between two points is of interest to several land professionals, especially surveying and cartographic engineers. It is known that Earth is not perfectly spherical, its second real way Carl Friedrich Gauss, a figure known as geoid, obtained by extending the average level of the sea, supposedly homogeneous and at rest, through the continents. As the geoid a figure of difficult mathematical treatment, others are used for solid geometric representation of the earth, notably the ellipsoid of revolution, which is the one that best fits the shape of the Earth. For this analysis were selected some cities distributed over the globe so as to train routes in various directions and magnitudes allowing the analysis of results in several situations, to take a bigger and better coverage trial. The calculations of azimuth on the surface of the ellipsoid of revolution, it was used the knowledge of analytic geometry by vectors and plans. But the azimuth calculations of the route in the area were conducted by using the formula of the classic spherical trigonometry. The results to

calculate the azimuth is using the two models are presented as absolute and relative values.

INTRODUÇÃO

A rotação da Terra causa um achatamento nos pólos, com isso a sua forma é frequentemente modelada como um elipsóide de revolução achatado nos pólos (elipsóide com o raio polar menor que o raio equatorial), em vez de um modelo esférico.

O objetivo deste trabalho foi criar uma rotina para calcular azimutes de partida e chegada entre dois pontos da superfície terrestre com coordenadas geográficas projetadas sobre o elipsóide de revolução, utilizando vários conceitos de plano e vetores no espaço tridimensional, e para uma melhor análise, comparar esses azimutes entre os mesmos pontos projetados no modelo esférico, sendo este, muito utilizado na astronomia de campo, utilizando a trigonometria esférica.

Hoje, essas informações relativas às rotas e direções são utilizadas em várias áreas como: a geodésia, a navegação aérea, a navegação oceânica, a dinâmica orbital, o cálculo de trajetórias de mísseis intercontinentais, a transmissão de rádio de grande alcance etc.

Segundo Swokowski (1994) e Anton (2000), temos alguns conceitos sobre vetores e planos no espaço tridimensional:

Norma ou magnitude de um vetor é a distância entre os pontos inicial e terminal de um vetor v , sendo $v = (v_1, v_2, v_3)$, um vetor no espaço 3-D (Figura 1).

A norma de um vetor v no espaço 3-D é dada pela Equação 1:

$$\|v\| = (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)^{1/2} \quad (1)$$

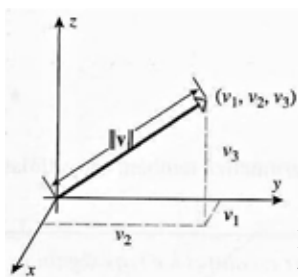


Figura 1. Norma de um vetor v .

Vetor unitário é um vetor de comprimento de uma unidade. No sistema de coordenadas cartesianas ou retangulares (x, y, z) , os vetores unitários ao longo dos eixos x , y e z são denotados por i , j e k , respectivamente (Figura 2).

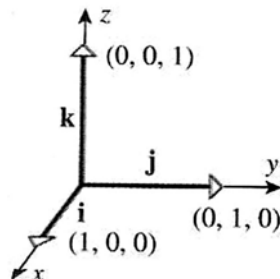


Figura 2. Vetores unitários.

Desse modo, $i = (1, 0, 0)$, $j = (0, 1, 0)$ e $k = (0, 0, 1)$. Logo, tem-se a Equação 2:

$$v = v_1 \cdot i + v_2 \cdot j + v_3 \cdot k. \quad (2)$$

Se $u = (u_1, u_2, u_3)$ e $v = (v_1, v_2, v_3)$ forem vetores no espaço 3-D, o produto escalar é definido pela Equação 3:

$$u \cdot v = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3, \quad (3)$$

ou seja, o produto escalar de dois vetores é formado pela soma da multiplicação de suas componentes correspondentes. O produto escalar de dois vetores é um escalar.

A fórmula do produto escalar entre u e v em termos dos comprimentos desses vetores e ângulo (θ) entre eles é dado pela Equação 4:

$$u \cdot v = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos(\theta). \quad (4)$$

O produto vetorial é definido pela Equação 5:

$$u \times v = (u_2 \cdot v_3 - u_3 \cdot v_2) \cdot i + (u_1 \cdot v_3 - u_3 \cdot v_1) \cdot j + (u_1 \cdot v_2 - u_2 \cdot v_1) \cdot k. \quad (5)$$

O produto vetorial de dois vetores é um vetor. A fórmula do produto vetorial entre u e v em termos dos comprimentos desses vetores e ângulo (θ) entre eles é dado pela Equação 6:

$$u \times v = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \sin(\theta). \quad (6)$$

Um plano no espaço 3-D pode ser determinado unicamente por um ponto especifi-

co no plano e o vetor perpendicular ao plano. Um vetor perpendicular ao plano é chamado de normal ao plano. Suponha uma equação do plano que passe pela origem em $P_0(x_0, y_0, z_0)$ e é perpendicular ao vetor normal ao plano, $\mathbf{n} = (a, b, c)$. Pela Figura 3, sejam os vetores $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e $\mathbf{r} = (x, y, z)$ que o plano consiste precisamente dos pontos $P = (x, y, z)$, para os quais o vetor $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ é ortogonal a \mathbf{n} , ou seja, $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$.

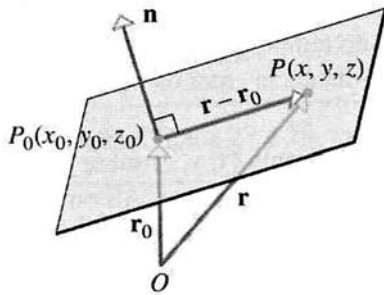


Figura 3. Plano ortogonal ao vetor \mathbf{n} .

Expressando esta equação vetorial em termos das componentes tem-se:

$(a, b, c) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$, da qual se obtém:

$a \cdot (x - x_0) + b \cdot (y - y_0) + c \cdot (z - z_0) = 0$, esta equação é chamada de forma ponto normal da equação de um plano. Efetuando-se a multiplicação, obtém-se a Equação 7:

$$a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z + d = 0. \quad (7)$$

Se a, b, c e d forem constantes, e a, b e c não forem todas nulas, então o gráfico da equação acima é um plano que tem a normal $\mathbf{n} = (a, b, c)$. Tem-se visto que um único plano é determinado por um ponto no plano e um vetor normal, não nulo ao plano. Em contrapartida, um plano não é determinado por um ponto no plano e um vetor paralelo, não-nulo, ao plano.

Dois planos distintos concorrentes determinam dois ângulos positivos de interseção, um ângulo agudo (θ) que satisfaz a condição $0 < \theta \leq \pi/2$ e o suplementar desse ângulo (Figura 4).

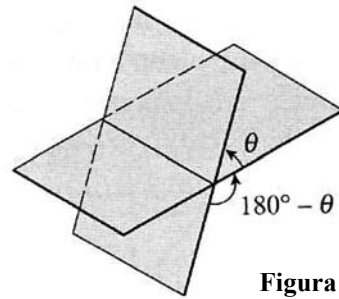


Figura 4. Ângulo entre planos.

Se \mathbf{n}_1 e \mathbf{n}_2 forem vetores normais ao plano, então dependendo da direção e do sentido de \mathbf{n}_1 e \mathbf{n}_2 , o ângulo θ é o ângulo entre \mathbf{n}_1 e \mathbf{n}_2 ou \mathbf{n}_1 e $-\mathbf{n}_2$ (Figura 5).

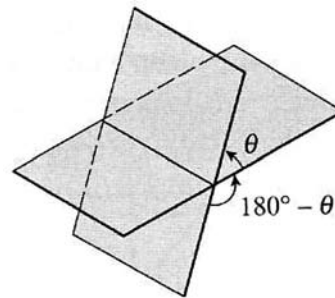


Figura 5. Ângulo entre os vetores \mathbf{n}_1 e \mathbf{n}_2 .

Pela fórmula do produto escalar, obtém-se o ângulo agudo entre planos (Equação 8):

$$\cos(\theta) = |(\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2)| / (\|\mathbf{n}_1\| \cdot \|\mathbf{n}_2\|) \quad (8)$$

Segundo o IBGE (1998) as coordenadas geográficas de um lugar, na superfície terrestre, são assim definidas:

Longitude geográfica (λ): é o ângulo medido ao longo do equador da Terra, tendo origem em um meridiano de referência (meridiano de Greenwich), e extremidade no meridiano do lugar. Na Conferência Internacional Meridiana, realizada em Washington em outubro de 1884, foi definida como variando de 0° a $+180^\circ$ (Oeste de Greenwich - W) e de 0° a -180° (Leste de Greenwich - E).

Latitude geográfica (ϕ): é o ângulo medido ao longo do meridiano do lugar, com origem no equador e extremidade no zênite do lugar. Varia entre -90° a $+90^\circ$. O sinal negativo indica latitudes do hemisfério sul (S) e o sinal positivo, hemisfério norte (N).

Convertendo essas coordenadas geográficas em coordenadas retangulares tridimensionais (X, Y, Z) (Equação 9), com origem no centro da Terra, o seu eixo Z positivo passando pelo Pólo Norte, o eixo X positivo passando pelo meridiano de referência (Meridiano de Greenwich) e o eixo Y positivo, satisfazendo-se a regra da mão direita (sistema dextrógiro) de acordo com a Figura 6; sendo a o raio equatorial e b o raio polar do elipsóide.

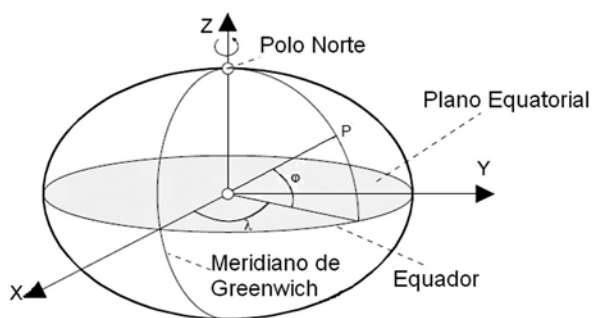
$$X = a \cdot \cos(\varphi) \cdot \cos(\lambda); Y = a \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin(\lambda); Z = b \cdot \sin(\varphi), \quad (9)$$


Figura 6. Coordenadas geográficas e coordenadas retangulares tridimensionais.

Azimute (Az): é o ângulo formado entre a direção Norte-Sul e a direção considerada, contado à partir do Pólo Norte, no sentido horário (NESW). O azimuth varia de 0° a 360° . A Figura 7 ilustra o azimuth de partida e o azimuth de chegada de uma rota do ponto A para o ponto B.

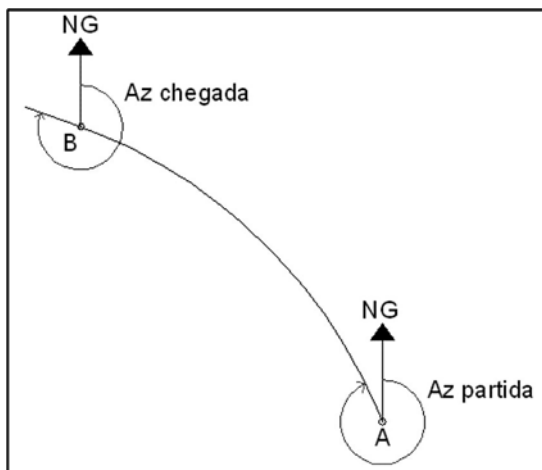


Figura 7. Azimutes de partida e de chegada de uma determinada rota.

Alguns conceitos sobre a trigonometria esférica são apresentados, segundo Ferraz (1980):

Triângulo esférico é a porção da superfície esférica limitada por três arcos de circunferências máximas, menores que 180° (triângulos eulerianos); ou seja, o triângulo esférico é a figura que se obtém, ligada dois a dois, por meio de arcos de circunferências máximas, com três pontos de uma superfície esférica, não situados sobre a mesma circunferência máxima. Como na Figura 8, o triângulo esférico então fica constituindo de três ângulos esféricos (A, B e C) e três lados que são arcos de circunferência máxima (a, b e c).

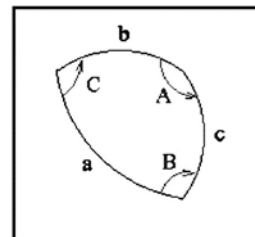


Figura 8. Triângulo esférico

Dentre as propriedades importantes dos triângulos esféricos, destacam-se: a soma dos ângulos internos de um triângulo esférico é maior que 180° e menor que 540° , ou seja, $180^\circ < A+B+C < 540^\circ$; a soma dos lados de um triângulo esférico (perímetro) é menor que 360° .

Para resolver um triângulo esférico, há a necessidade de conhecer pelo menos três elementos do mesmo (apenas ângulos, apenas distâncias ou ângulos e distâncias).

MATERIAL E MÉTODOS

Para os cálculos dos azimutes sobre o elipsóide de revolução, foi utilizado o modelo adotado pelo Sistema WGS-84 (*World Geodetic System - 1984*), sendo este o sistema de referência do GPS (*Global Positioning System*) que possui os seguintes parâmetros fundamentais (Tabela 1):

Tabela 1. Parâmetros fundamentais do WGS-84.

Parâmetro	Notação	Valor
Semi-eixo maior do elipsóide	a	6.378.137 m
Achatamento	f	1/298,257223563
Velocidade angular da Terra	ω	$7.292.115,0 \times 10^{-11}$ rad/s
Constante gravitacional da Terra	GM	$3.986.004,418 \times 10^8$ m ³ /s ²

Pelo achatamento na Tabela 1, b = semi-eixo menor (raio polar) = 6.356.752,31414 m.

Para os cálculos dos azimutes sobre o modelo esférico utilizou-se um Raio Médio (RM), obtido pela Equação 10, segundo Espartel (1977):

$$RM = (2 * a + b) / 3 = 6.371.008,771 \text{ m; (10)}$$

Para fazer este estudo foram escolhidas várias cidades distribuídas no globo terrestre, aplicando-se a elas rotas em várias direções, para se ter uma melhor e maior abrangência experimental. Suas coordenadas geográficas aproximadas foram obtidas através do *software MapSource*, com referência no sistema WGS-84; logo transformadas em X, Y e Z (Tabela 2).

Tabela 2. Coordenadas geográficas e retangulares tridimensionais das cidades.

Cidades (País)	Latitude (ϕ)	Longitude (λ)	X (m)	Y (m)	Z (m)
Atenas (GRE)	37° 58' 08" N	23° 42' 31" E	4603805,3	2021755,7	3910887,1
Bagdá (IRQ)	33° 20' 36" N	44° 24' 24" E	3806451,6	3728420,8	3494019,1
Bankok (TAI)	13° 45' 18" N	100° 32' 49" E	-1133980	6090554,9	1511449,2
Berlin (ALE)	52° 28' 54" N	13° 17' 36" E	3780303,5	893161,2	5041912,1
Bogotá (COL)	04° 36' 12" N	74° 04' 51" W	1743758,2	-6113747,2	510173
Buenos Aires (ARG)	34° 35' 45" S	58° 21' 50" W	2753922,1	-4470121,1	-3609262,8
Cairo (EGI)	30° 03' 21" N	31° 14' 13" E	4720209,1	2862822	3183739,9
Cidade do México (MEX)	19° 27' 24" N	99° 08' 26" W	-955351,6	-5937538	2117395,5
Havana (CUB)	23° 06' 55" N	82° 23' 11" W	777208,6	-5814365,9	2495549,3
Honolulu (EUA)	21° 18' 39" N	157° 21' 45" W	-5484234,3	-2287079,8	2310218,3
Jakarta (INS)	06° 09' 48" S	106° 49' 12" E	-1834948,2	6069982,4	-682481
Johanesburgo (AFS)	26° 12' 09" S	28° 03' 33" E	5050079,1	2691868,4	-2806792,2
Lagos (NIG)	06° 26' 19" N	03° 25' 00" E	6326642	377719,7	712837,4
Londres (ING)	51° 30' 54" N	00° 03' 57" E	3969174	4561,3	4975882,2
Los Angeles (EUA)	34° 06' 45" N	118° 24' 38" W	-2512485	-4644699,3	3564992,6
Moscou (RUS)	55° 44' 41" N	37° 35' 03" E	2845030,3	2189716,2	5254097,5
Nairobi (QUE)	01° 17' 07" S	36° 48' 55" E	5104871,4	3821055	-142585,3
Nova Delhi (IND)	28° 34' 32" N	77° 12' 03" E	1240858,7	5462022,9	3040544,2
Nova Venécia-ES (BRA)	18° 43' 15" S	40° 23' 48" W	4600447,8	-3914826,7	-2040247,4
Nova York (EUA)	40° 43' 36" N	73° 59' 35" W	1332870,7	-4646143,5	4147471,8
Paris (FRA)	48° 51' 22" N	02° 20' 24" E	4193010,2	171341,1	4787013,2
Pequim (CHN)	39° 54' 48" N	116° 22' 41" E	-2171581,1	4383742,2	4078671,1
Rio de Janeiro (BRA)	22° 54' 23" S	43° 10' 35" W	4284472,1	-4020065,2	-2474218,2
Roma (ITA)	41° 54' 06" N	12° 29' 29" E	4634824	1026785,5	4245384
Santiago (CHI)	33° 27' 12" S	70° 39' 51" W	1761974,1	-5021339,6	-3504208
São Francisco (EUA)	37° 45' 36" N	122° 26' 34" W	-2705055,7	-4255459,2	3892591,6
Seul (COR)	37° 33' 44" N	126° 58' 48" E	-3041305,4	4038880,4	3875220,5
Sydney (AUS)	33° 53' 34" S	151° 13' 37" E	-4640700,8	2548405,2	-3544782,6
Tóquio (JAP)	35° 40' 21" N	139° 46' 05" E	-3955641,1	3346558	3706949,8
Viçosa-MG (BRA)	20° 45' 40" S	42° 52' 10" W	4371037,7	-4057477,4	-2253293,1
Wellington (NZE)	41° 15' 52" S	174° 46' 53" E	-4774404,9	436069,7	-4192503,2

Azimute no elipsóide de revolução

Para calcular o azimute no elipsóide de revolução, aplicamos a idéia de ângulo entre dois planos. Com base na Figura 9, considere um vetor saindo da origem $P_0(0, 0, 0)$ até um ponto da superfície do elipsóide $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e outro vetor de P_0 até $P_2(x_2, y_2, z_2)$, pois só existe um único plano que passa na origem e é paralelo a esses dois vetores, esse plano contém a rota $P_1 - P_2$. O outro plano é obtido pelo vetor de P_0 até P_1 e pelo vetor de P_0 até $P_p(0, 0, z_p)$ = ponto do Pólo Norte ou Pólo Sul, ou seja, é o plano que é o próprio meridiano passando pela origem e pelos pólos, sendo o plano do norte geográfico. A interseção desses dois planos tem-se um ângulo agudo (θ) que satisfaz a condição $0 < \theta \leq \pi/2$ e o suplementar desse ângulo ($180^\circ - \theta$). O produto vetorial dos vetores P_0P_1 e P_1P_2 tem-se o vetor n_1 que é normal ao plano $P_0P_1P_2$ e o produto vetorial dos vetores P_0P_p e P_0P_1 tem-se o vetor n_2 que é normal ao plano $P_0P_pP_1$, então o ângulo entre n_1 e n_2 é o mesmo ângulo θ entre os planos (ver Figura 5).

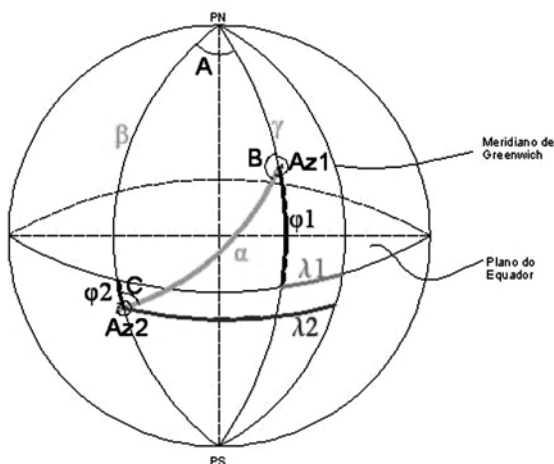


Figura 9. Azimutes no elipsóide e na esfera.

Pela fórmula do produto escalar obtém-se a fórmula para o ângulo agudo entre os planos, como já foi visto na Equação 8: $\cos(\theta) = |(n_1 \cdot n_2)| / (\|n_1\| \cdot \|n_2\|)$.

Depois de calcular o ângulo (agudo) θ , basta fazer a analogia dos quadrantes para obter os azimutes de partida e de chegada de uma determinada rota, de acordo com a Tabela 3.

Tabela 3. Azimutes de partida e de chegada com análise nos quadrantes.

Quadrante	Azimute de partida	Azimute de chegada
1º Quadrante	θ	$180^\circ - \theta$
2º Quadrante	θ	$180^\circ - \theta$
3º Quadrante	$360^\circ - \theta$	$180^\circ + \theta$
4º Quadrante	$360^\circ - \theta$	$180^\circ + \theta$

Azimute na esfera

Para o cálculo dos azimutes de partida (Az1) e de chegada (Az2) das rotas sobre a superfície esférica, de acordo com a Figura 9, foi utilizada a fórmula da analogia dos senos (Equação 11), neste caso necessita-se calcular antes a distância da rota (α).

$$\begin{aligned} \text{sen}B &= \text{sen}\beta * \text{sen}A / \text{sen}\alpha; \\ \text{sen}C &= \text{sen}\gamma * \text{sen}A / \text{sen}\alpha. \end{aligned} \tag{11}$$

Pela fórmula têm-se dois valores de B e dois valores de C, verificar se β ou $\gamma < \alpha$, ou seja, o lado ao ângulo oposto B ou C é menor que o lado ao ângulo oposto A, então $B < A$, caso contrario B ou $C > A$. A análise dos quadrantes segue o mesmo procedimento adotado no elipsóide de revolução (Tabela 3).

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Os azimutes de partida e chegada das rotas nas duas superfícies podem ser observados nas Tabelas 4 e 5, assim como os erros absolutos e erros relativos.

De acordo com a Tabela 4 podemos fazer algumas análises nos azimutes de partida:

As rotas com predominância vertical acontecem nas rotas 9, 10 e 14. Já as rotas com predominância horizontal estão nas rotas 11 e 16.

Tabela 4. Azimutes de partida (Az_p) das seguintes rotas sobre o elipsóide e sobre a esfera, com os erros absolutos e relativos.

Rotas (de → para)	Az_p (elipsóide)	Az_p (esfera)	E abs.	E rel. (%)
01) Atenas (GRE) → Berlin (ALE)	336° 44' 52"	336° 47' 28"	00° 02' 36"	0,013
02) Paris (FRA) → Sydney (AUS)	111° 23' 35"	111° 25' 17"	00° 01' 42"	0,025
03) Rio de Janeiro (BRA) → Roma (ITA)	38° 22' 04"	38° 17' 18"	00° 04' 46"	0,207
04) Bogotá (COL) → Moscou (RUS)	31° 58' 55"	31° 53' 46"	00° 05' 09"	0,268
05) Londres (ING) → São Francisco (EUA)	316° 54' 39"	316° 56' 53"	00° 02' 14"	0,012
06) Nova Venécia-ES (BRA) → Johannesburgo (AFS)	110° 28' 05"	110° 31' 28"	00° 03' 23"	0,051
07) Johannesburgo (AFS) → Buenos Aires (ARG)	239° 25' 20"	239° 21' 16"	00° 04' 04"	0,028
08) Johannesburgo (AFS) → Sydney (AUS)	135° 10' 10"	135° 14' 49"	00° 04' 39"	0,057
09) Cidade do México (MEX) → Nova Delhi (IND)	04° 19' 35"	04° 18' 49"	00° 00' 46"	0,295
10) Nova York (EUA) → Pequim (CHN)	351° 58' 20"	351° 58' 04"	00° 00' 16"	0,001
11) Tóquio (JAP) → Honolulu (EUA)	93° 16' 15"	93° 16' 42"	00° 00' 27"	0,008
12) Sydney (AUS) → Santiago (CHI)	145° 13' 02"	145° 16' 46"	00° 03' 44"	0,043
13) Honolulu (EUA) → Cidade do México (MEX)	99° 18' 14"	99° 19' 50"	00° 01' 36"	0,027
14) Santiago (CHI) → Bogotá (COL)	354° 28' 27"	354° 29' 13"	00° 00' 46"	0,004
15) Viçosa-MG (BRA) → Nova York (EUA)	334° 56' 09"	335° 00' 02"	00° 03' 53"	0,019
16) Lagos (NIG) → Jacarta (INS)	94° 45' 45"	94° 46' 41"	00° 00' 56"	0,016
17) Wellington (NZE) → Havana (CUB)	79° 52' 46"	79° 51' 38"	00° 01' 08"	0,024
18) Bagdá (IRQ) → Seul (COR)	60° 06' 20"	60° 02' 51"	00° 03' 29"	0,097
19) Bangkok (TAI) → Cairo (EGI)	296° 59' 38"	297° 04' 02"	00° 04' 24"	0,025
20) Los Angeles (EUA) → Nairobi (QUE)	139° 26' 04"	139° 29' 59"	00° 03' 55"	0,047
21) Viçosa-MG (BRA) → Tóquio (JAP)	351° 43' 12"	351° 44' 38"	00° 01' 26"	0,007

Tabela 5. Azimutes de chegada (Az_c) das seguintes rotas sobre o elipsóide e sobre a esfera, com os erros absolutos e relativos.

Rotas (de → para)	Az_c (elipsóide)	Az_c (esfera)	E abs.	E rel. (%)
01) Atenas (GRE) → Berlin (ALE)	329° 17' 47"	329° 19' 40"	00° 01' 53"	0,009
02) Paris (FRA) → Sydney (AUS)	132° 22' 58"	132° 26' 56"	00° 03' 58"	0,050
03) Rio de Janeiro (BRA) → Roma (ITA)	50° 07' 26"	50° 04' 17"	00° 03' 09"	0,105
04) Bogotá (COL) → Moscou (RUS)	69° 21' 20"	69° 20' 19"	00° 01' 01"	0,024
05) Londres (ING) → São Francisco (EUA)	212° 33' 31"	212° 30' 14"	00° 03' 17"	0,026
06) Nova Venécia-ES (BRA) → Johannesburgo (AFS)	98° 39' 08"	98° 40' 31"	00° 01' 23"	0,023
07) Johannesburgo (AFS) → Buenos Aires (ARG)	249° 43' 05"	249° 40' 32"	00° 02' 33"	0,017
08) Johannesburgo (AFS) → Sydney (AUS)	49° 37' 08"	49° 33' 12"	00° 03' 56"	0,132
09) Cidade do México (MEX) → Nova Delhi (IND)	175° 21' 21"	175° 22' 04"	00° 00' 43"	0,007
10) Nova York (EUA) → Pequim (CHN)	187° 55' 53"	187° 56' 07"	00° 00' 14"	0,002
11) Tóquio (JAP) → Honolulu (EUA)	119° 22' 40"	119° 28' 34"	00° 05' 54"	0,082
12) Sydney (AUS) → Santiago (CHI)	34° 34' 52"	34° 31' 07"	00° 03' 45"	0,181
13) Honolulu (EUA) → Cidade do México (MEX)	102° 48' 30"	102° 50' 43"	00° 02' 13"	0,036
14) Santiago (CHI) → Bogotá (COL)	355° 22' 20"	355° 23' 15"	00° 00' 55"	0,004
15) Viçosa-MG (BRA) → Nova York (EUA)	328° 31' 17"	328° 34' 14"	00° 02' 57"	0,015
16) Lagos (NIG) → Jacarta (INS)	95° 06' 43"	95° 07' 44"	00° 01' 01"	0,018
17) Wellington (NZE) → Havana (CUB)	53° 38' 31"	53° 33' 51"	00° 04' 40"	0,145
18) Bagdá (IRQ) → Seul (COR)	114° 00' 58"	114° 03' 40"	00° 02' 42"	0,039
19) Bangkok (TAI) → Cairo (EGI)	272° 07' 57"	272° 08' 16"	00° 00' 19"	0,002
20) Los Angeles (EUA) → Nairobi (QUE)	147° 22' 33"	147° 27' 47"	00° 05' 14"	0,059
21) Viçosa-MG (BRA) → Tóquio (JAP)	189° 32' 05"	189° 30' 50"	00° 01' 15"	0,011

O maior erro absoluto entre os azimutes de partida acontece na rota 4, com $5^{\circ} 9''$ e o menor erro absoluto surge na rota 10, com $16''$, apresentando também o menor erro relativo com 0,001%. Isto acontece, devido, a rota 4 está nas proximidades da bissetriz entre o equador e os meridianos (próximo a 45°), e a rota 10 com paralelismo ao equador. O maior erro relativo nos azimutes de partida encontra-se na rota 9, com 0,295%.

Da Tabela 5 nos azimutes de chegada tem-se:

As rotas com predominância vertical acontecem nas rotas 9, 10 e 14. Já as rotas com predominância horizontal estão nas rotas 16 e 19.

O maior erro absoluto entre os azimutes de chegada acontece na rota 11, com $5^{\circ} 54''$ e o menor erro absoluto acontece na mesma rota em que apresentou o menor erro absoluto no azimute de partida, ou seja, na rota 10, com um erro de $14''$.

O maior erro relativo está na rota 17 (Wellington-NZE) \tilde{O} (Havana-CUB) com 0,145% e o menor na rota 10 (Nova York-EUA) \tilde{O} (Pequim-CHN) com 0,002%.

As maiores discrepâncias entre os azimutes de partida e de chegada nos dois modelos acontecem nas rotas 10 e 21, com uma defasagem próxima a 180° , isto se deve as rotas ter trajetórias próximas ao pólo norte e serem longas.

CONCLUSÃO

Pode-se perceber que aconteceram grandes discrepâncias entre os azimutes de partida e chegada tanto no elipsóide e quanto na esfera, as maiores discrepâncias estão nas rotas longas que passam nas proximidades dos pólos. Observa-se que as rotas onde acontecem as menores variações dos azimutes de partida ou de chegada, são as rotas com predominância vertical e horizontal, ou seja, as rotas próximas dos azimutes de 0° , 90° , 180°

e 270° e as rotas com maiores variações são as rotas com azimutes próximos de 45° , 135° , 225° e 315° .

Outra conclusão é que as rotas com direção no 1° e 3° quadrantes, o azimute sobre o elipsóide é maior que sobre a esfera e as rotas com direção no 2° e 4° quadrantes, o azimute sobre a esfera é maior que sobre o elipsóide, isto é válido tanto para o azimute de partida quanto o azimute de chegada. Isto acontece devido ao fato, do raio equatorial ser maior que o raio polar no elipsóide de revolução. A confirmação é que os erros são significativos, pois 1 minuto de arco equivale aproximadamente a um deslocamento de 1,852 km.

Conclui-se que para aplicar essa metodologia na navegação oceânica e aérea, é recomendável utilizar os cálculos de azimutes sobre o elipsóide de revolução, pois é uma superfície matemática que melhor adapta-se a forma da Terra.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANTON, H. **Cálculo, um novo horizonte**; Trad. Cyro de Carvalho Patarra e Maria Tamana; 6^a ed. - Porto Alegre-RS: Bookman, Volume 2. 2000. 680p.

ESPARTEL, L. **Curso de Topografia**. 5^a ed.- Porto Alegre-RS: Editora Globo. 1977. 658p.

FERRAZ, A. S. **Elementos de Trigonometria Esférica**. 1^a ed., UFV - Viçosa-MG: Imprensa Universitária, 1980. 23p.

IBGE, Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística, Diretoria de Geociências - DGC; **Noções Básicas de Cartografia**: Rio de Janeiro-RJ. 1998. 128p.

SWOKOWSKI, E. W. **Cálculo com geometria analítica**: Trad. Alfredo Alves de Faria; 2^a ed. - São Paulo-SP: Makron Books, Volume 2. 1994. 744p.