

CÁLCULO DA LATITUDE E DIREÇÃO DOS PÓLOS PELA PROJEÇÃO DA TRAJETÓRIA CIRCULAR DAS ESTRELAS

Julierme Wagner da Penha
Jair Ferreira de Resende Filho
Universidade Federal de Viçosa - UFV
juliermewagner@yahoo.com.br; jairfrf@yahoo.com.br

RESUMO

Muitas vezes, a gente olha para o céu e admira a beleza das estrelas, até contamos, mas nem imaginamos que podemos estudar estes astros luminosos, bem como nos localizarmos por meio deles, assim como faziam os navegadores do passado. Na verdade, esta atividade é uma das mais antigas estudadas pelo homem. Este trabalho mostra um método novo e simplificado para determinar tanto a coordenada da latitude astronômica e a direção do Pólo Norte ou do Sul, por meio da observação de estrelas. A idéia é que esse método possa ser utilizado sem a prévia informação do anuário astronômico, bem como sem a prévia escolha do astro a ser observado. O método tem originado do princípio de que, caso tivéssemos um astro localizado exatamente na posição do pólo sul, seria suficiente posicionar o instrumento e visar o astro para determinar a latitude (altura do pólo elevado), independentemente do horário de observação, pois, o mesmo não teria movimento aparente algum. Portanto, este método sugere que, após a escolha do astro, o mesmo deverá ser observado, no mínimo em três posições diferentes. Projetando estas trajetórias em um plano perpendicular ao eixo terrestre rotação da Terra no pólo, tem-se várias circunferências concêntricas. O centro desta circunferência seria a posição exata do pólo. Determinando o centro da circunferência determina-se também a latitude e a direção dos pólos. Pode-se concluir que o método apresentado é viável para determinação da latitude e da direção dos pólos, pois os resultados encontrados foram satisfatórios.

ABSTRACT

Many times, the people looks the sky and admire the beauty of the stars; they count them, but don't imagine that can to study these luminous stars, as well as being situated by means of them, like the navigators made in the past. Actually, this activity is one of oldest studied by man.

This work shows a new and simplified method to determine both the astronomical latitude coordinate and South or North Pole direction, means the stars observation. The idea is that such method can be used without previous astronomical yearbook information, as well as without previous choice of star being observed. The method has originated of the principle that if had one star located accurately on the Polar Region would be enough to locate the device in any point and to aim at such star. The read vertical angle would be the local latitude (height of the high Polar Region), therefore this star wouldn't have apparent some movement. So this method suggests that readings in any not nomadic star are made, in three different positions. Projecting these readings in perpendicular plan to the land rotation axle and with the tangent point being the Polar Region would have a circumference with the Polar Region having been the center. Determining the center it also determines both latitude and Polar Regions direction. It can be concluded that the present method is viable to determine both latitude and Polar Regions; therefore the detected results had been satisfactory.

INTRODUÇÃO

Muitas vezes, as pessoas olham para o céu e contemplam a beleza das estrelas, as contam, mas nem imaginam que podemos estudar estes astros luminosos, bem como nos localizarmos por meio deles, assim como faziam os navegadores do passado. Na verdade, esta atividade é uma das mais antigas estudadas pelo homem.

De acordo com José Roberto V. Costa, em *Astronomia no Zênite* (www.zenite.nu), “Contemplar o firmamento era como assistir ao movimento de um imenso relógio, com extraordinária precisão, e cujo mecanismo era preciso conhecer e dominar”.

Além disso, segundo tal autor, “Se não pudessemos contemplar uma noite estrelada jamais poderíamos ter nos aventurados pelos mares; as constelações guiaram navegantes chineses e ocidentais durante séculos”.

O objetivo deste trabalho foi propor um método novo e simplificado para determinação da coordenada astronômica da latitude e a direção dos pólos (sul ou norte), por meio da observação de estrelas. A idéia é que tal método possa ser empregado sem a prévia informa-

ção do anuário astronômico, bem como sem a prévia escolha do astro a ser observado.

MATERIAL E MÉTODOS

Princípio do método

Caso tivéssemos um astro localizado exatamente na posição do pólo sul, bastaria posicionar o instrumento e visar o astro para determinar a latitude (altura do pólo elevado), independentemente do horário de observação, pois, o mesmo não teria movimento aparente algum.

Devido ao movimento de rotação dos astros não errantes, eles descrevem um movimento aparente em torno da terra, como se estivessem colados em uma esfera (esfera celeste). Este movimento é circular de velocidade angular constante. Se projetássemos estas trajetórias em um plano perpendicular ao eixo de rotação da Terra no pólo, teríamos várias circunferências concêntricas, uma para cada trajetória. O centro desta circunferência seria a posição exata do pólo, como se fosse um astro imaginário, localizado exatamente neste pólo, conforme ilustra a Figura 1.

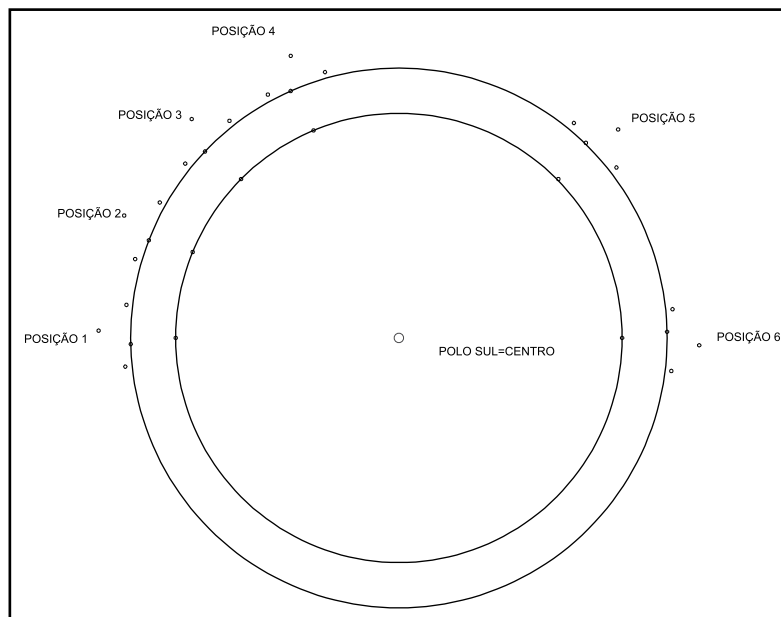


Figura 1. Trajetória projetada sobre o plano perpendicular ao eixo de rotação da Terra.

O princípio do método proposto é a determinação do centro das trajetórias circulares de um ou mais astros projetados em um plano tangente à esfera no pólo, por meio de cálculo de geometria analítica plana e, desta forma, determinar a latitude e o sul verdadeiro.

Assim, tem-se determinada a latitude do ponto pela altura do pólo elevado (elevação do centro das circunferências) e o sul verdadeiro (Rumo do centro das circunferências).

Com a equação das circunferências e a posição do astro em um determinado instante (observação), têm-se as equações dos movimentos dos astros observados. Dessa maneira, pode ser determinada a longitude do ponto, usando os cálculos de astronomia de campo convencional.

Transformação dos ângulos observados em coordenadas cartesianas

Para transformar os ângulos observados em coordenadas planas, projeta-se ortogonalmente a posição do astro em um plano perpendicular ao eixo de rotação da terra e tangente à esfera celeste no pólo, considerando um raio unitário.

Considera-se o eixo das ordenadas, a vertical que passa pelo pólo e o eixo das abscissas a horizontal que passa pelo mesmo, elevada do horizonte com o ângulo da latitude do ponto (pólo elevado). E sendo considerado o raio da esfera unitário, os valores das coordenadas cartesianas são numericamente iguais aos valores dos senos dos ângulos horizontais, para abscissas, e verticais para as ordenadas, segundo mostra a Figura 2.

Determinação das coordenadas cartesianas do centro das trajetórias

Para determinação do centro das circunferências, pode-se usar a equação da circunferência ou a interseção de duas mediatrizes de retas que passam pelas posições do astro em posições diferentes.

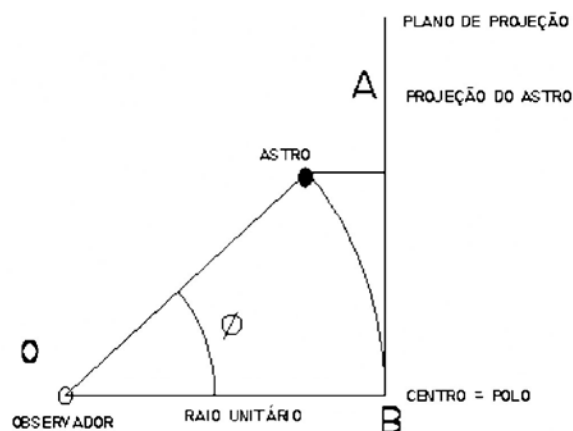


Figura 2. Projeção ortogonal do astro sobre o plano tangente ao pólo.

Pela equação da circunferência (Equação 1), tem-se:

$$(X - X_0)^2 + (Y - Y_0)^2 = R^2, \quad (1)$$

sendo:

X = abscissa plana calculada e X₀ a abscissa do centro da circunferência;

Y = ordenada plana calculada e Y₀ a ordenada do centro da circunferência; e

R = raio da circunferência.

Pela equação da reta (Equação 2), tem-se:

$$Y = (a \cdot X) + b, \quad (2)$$

sendo:

a = inclinação da reta; e b = termo independente da reta.

Sabe-se que por três pontos não colineares passa-se somente uma circunferência, assim tendo as coordenadas de três pontos, são suficientes para a determinação de seu centro pela Equação 1.

Por outro lado, dois pontos não coincidentes determinam uma reta, porém, será necessária a determinação da equação de duas retas para resolução do problema. Dessa forma, seria preciso a determinação das coordenadas de quatro pontos da trajetória para a resolução do sistema, entretanto, pode ter a utilização de um ponto comum às duas retas. Sendo assim, tanto se utilizar à equação da circunferência

como a equação da reta, necessita-se de no mínimo três observações para a resolução do sistema. Obtendo-se assim três coordenadas.

A equação das retas são mais simples e numericamente mais fáceis de se trabalhar. Trabalhou-se com a Equação 2, embora seja possível a determinação do centro de uma circunferência a partir de três de seus pontos, utilizando software de desenho técnico como, por exemplo, o AutoCAD.

ROTEIRO DE TRABALHO

Determinação das coordenadas aproximadas

Para diminuir a probabilidade de erros de projeção nos cálculos é importante que a posição aproximada do ponto seja conhecida, a fim de que o cálculo primário das coordenadas se dê em um plano próximo ao do plano que contém o pólo sul. Para isto, podem-se determinar as coordenadas aproximadas por meio de cartas, pontos próximos conhecidos, e o meridiano pode ser obtido com observação ao Sol, bússola e correção da declinação magnética; ou, ainda, pela observação do Cruzeiro do Sul, se o mesmo estiver visível na época.

Observação de campo

Procedimentos para a obtenção dos ângulos:

- Instalação do instrumento;
- Escolha do ponto de referência do rumo de visada;

Este ponto deve ser distante, bem visível e estável. Ele servirá como referência de visada de ré, caso seja necessário a remoção do instrumento, antes que sejam realizadas todas as observações ou em caso de perda de dados, bem como para transferências futuras de rumos.

- Leitura da temperatura ambiente e da pressão;
- Cálculo do erro de refração;

- Zeragem do instrumento;

Para facilitar os cálculos é conveniente que o instrumento seja zerado horizontalmente próximo ao meridiano.

- Visada no ponto de referência;
- Escolha dos astros a serem observados;

Como os astros se movem no sentido horário (de leste para oeste), no caso dos astros situados ao sul, devem-se escolher astros que estejam mais ao leste e mais baixos, para evitar que os mesmos passem abaixo do horizonte, antes que sejam feitas todas as observações necessárias.

- Fazer a observação.

Após a escolha do(s) astro(s), o(s) mesmo(s) deverá ser observado(s) em, no mínimo, três posições diferentes.

Deverão ser coletados os seguintes dados: ângulos horizontais, ângulos verticais e tempo da observação (hora, minuto e segundo).

É importante salientar que para menor probabilidade de erro, estas três observações devem ocorrer com intervalo de tempo de no mínimo três horas e ideal de seis horas, pois, leituras em intervalos de tempo pequeno podem acarretar erros, como ângulo de baixa rigidez.

Transformação dos ângulos lidos em ângulos de cálculo

Para transformar o ângulo zenital, corrigido do erro zenital e da refração (Aze), lido em ângulo vertical de cálculo de coordenadas cartesianas, calcula-se o ângulo vertical correspondente (Av). Nesse sentido, tem-se as Equações 3, 4, 5 e 6:

$$Av = 90^\circ - Aze; \quad (3)$$

$$Aze = Z' + R; \quad (4)$$

$$Z' = (360^\circ + PD - PI)/2; \quad (5)$$

$$R = (64,895 \cdot P)/(820 + 3 \cdot T) \cdot \text{tg}(Z'); \quad (6)$$

sendo:

- R a refração atmosférica;
- Quando o raio incidente passa de um meio menos denso para um meio mais denso, ele se aproxima da normal. Só não acontece refração se o ângulo de incidência for de 90°;
- P é a pressão atmosférica;
- T é a temperatura em °C;
- Z' é o ângulo zenital observado; e
- Aze é o ângulo zenital corrigido da refração.

Para transformar o ângulo vertical (Av) para um plano tangente ao pólo, tem-se a Equação 7:

$$Acv = Av \pm |La|, \quad (7)$$

sendo:

- Acv é o ângulo de cálculo vertical;
- La é a latitude aproximada do ponto.

A latitude aproximada deve ser subtraída se o astro observado estiver no mesmo hemisfério do observador. Se o astro a ser observado estiver em hemisfério oposto ao do observador, a latitude deverá ser somada.

No caso do ângulo de cálculo horizontal (Ach), tem-se a Equação 8:

$$Ach = (PD + PI) / 2 \pm 90^\circ \quad (8)$$

Sendo + 90° se PD > PI.

Transformação dos ângulos calculados em coordenadas cartesianas

Para transformar os ângulos de cálculo em coordenadas cartesianas, basta encontrar os senos dos mesmos (Equações 9 e 10).

$$X = \text{sen} (Ach); \quad (9)$$

$$Y = \text{sen} (Acv). \quad (10)$$

Cálculo das equações das retas que passam pelas posições projetadas dos astros observados, de acordo com a Equação 11:

$$Y - Y_0 = m * (X - X_0), \quad (11)$$

sendo:

X e Y, variáveis dependentes entre si,
X0 e Y0, coordenadas de um ponto qualquer da reta;

A inclinação da reta pode ser calculada pela Equação 12:

$$m = ((Y_2 - Y_1) / (X_2 - X_1)); \quad (12)$$

onde:

X1, Y1, X2 e Y2, são as coordenadas dos pontos 1 e 2, respectivamente.

As coordenadas do ponto médio entre dois pontos é a média aritmética das coordenadas destes pontos. E a inclinação da reta perpendicular ao seguimento é encontrada pela Equação 13:

$$m \cdot m_p = -1, \quad (13)$$

sendo:

m = inclinação da reta;

m_p = inclinação da reta perpendicular;

Com as coordenadas dos pontos médios e as inclinações das retas perpendiculares aos seguimentos, chega-se às equações das retas que se cruzam no centro da circunferência. E, resolvendo o sistema de duas equações e duas incógnitas, chega-se às coordenadas do ponto de cruzamento das retas, que é o centro das circunferências das trajetórias dos astros.

Este centro deverá representar a posição do pólo no plano de projeção. Caso tivéssemos escolhido o rumo exato do pólo e a latitude exata, a coordenada deste ponto seria a origem dos eixos (X = 0, Y = 0). Sendo assim, o arco-seno das coordenadas do ponto encontrado deve ser somado ou subtraído ao rumo escolhido e à latitude aproximada adotada no início dos cálculos para se chegar aos valores reais dos mesmos.

Ajustamento das coordenadas

Para corrigir possíveis erros de projeção na escolha do plano de referência, devem-se re-

petir os cálculos com a latitude aproximada e ao rumo escolhido mais próximo do real, até que seja desprezível a diferença (método iterativo).

As iterações são feitas da seguinte forma: calcula-se o arco-seno da coordenada Y do centro da circunferência e soma-se ou subtrai-se ao ângulo de cálculo vertical (Acv). No entanto, isto vai depender de qual hemisfério o observador estará trabalhando. O mesmo é feito para a coordenada X: calcula-se o arco-seno de X, e soma-se ou subtrai-se ao ângulo de cálculo horizontal (Ach). É necessário fazer estas iterações até que as coordenadas do centro sejam aproximadamente zero.

Localização e caracterização da área de estudo

O município de Viçosa está localizado na Zona da Mata, sudeste do Estado de Minas Gerais (MG) e limita-se com os municípios de Teixeira e Guaraciaba a norte, ao sul com Paula Cândido e Coimbra, a leste com Cajuri e São Miguel do Anta e a oeste com Porto Firme, ocupando uma área de 299,40 km². Na Figura 3, está representado o limite municipal e sua área urbana no estado de Minas Gerais.

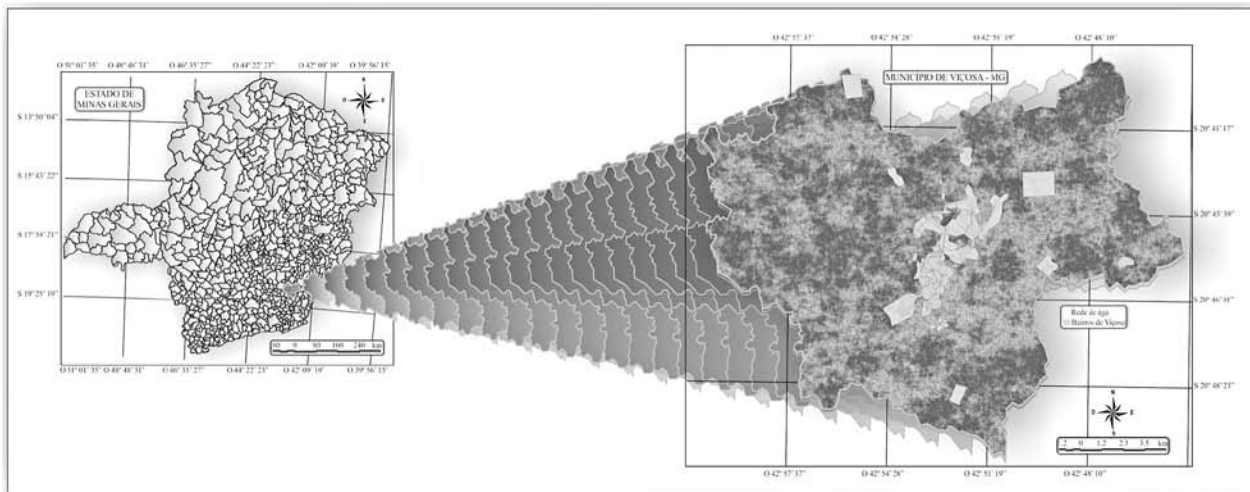


Figura 3. Representação do limite municipal de Viçosa em MG.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Os ângulos foram observados em Viçosa-MG, na data 12/08/2006, com uma tem-

peratura média de 20°C e uma pressão média de 700 mm Hg. Os dados coletados podem ser visualizados na Tabela 1.

Tabela 1. Leituras observadas em Viçosa-MG na data 12/08/2006.

Observação.	Ângulos	PD	PI
1	Z	47°57'55"	312°02'05"
	H	10°25'25"	190°29'30"
2	Z	54°14'25"	305°45'40"
	H	18°36'45"	198°42'45"
3	Z	58°45'05"	301°14'55"
	H	21°45'50"	201°49'30"

Z = ângulo zenital; H = ângulo horário.

Cálculo da coordenada X

Obteve-se o ângulo de cálculo horizontal, por meio da Equação 8:

$$\text{Ach1} = (\text{PD} + \text{PI}) / 2 \pm 90^\circ; (+ 90^\circ \text{ se } \text{PD} > \text{PI})$$

$$\text{Ach1} = 10^\circ 27' 27.5''$$

Portanto, calculou-se os valores das coordenadas planas X1, X2 X3, através da Equação 9:

$$\text{X1} = \text{sen} (10^\circ 27' 27.5'')$$

$$\text{X1} = 0,1815$$

$$\text{Ach2} = 18^\circ 39' 45''$$

$$\text{X2} = \text{sen} (18^\circ 39' 45'')$$

$$\text{X2} = 0,3200$$

$$\text{Ach3} = 21^\circ 47' 40''$$

$$\text{X3} = \text{sen} (21^\circ 47' 40'')$$

$$\text{X3} = 0,375$$

Cálculo da coordenada Y

Por meio da Equação 5, encontrou-se o valor de Z'.

$$\text{Z}' = (3600 + \text{PD} - \text{PI}) / 2$$

$$\text{Z}' = 47^\circ 57' 55''$$

Usando-se a Equação 6, calculou-se a refração em segundos:

$$\text{R} = (64,895 \cdot \text{P}) / (820 + 3 \cdot \text{T}) \cdot \text{tg} (\text{Z}')$$

$$\text{R} = 57,26'' = 0^\circ 00' 57,26''$$

A partir da Equação 4, encontrou-se o ângulo zenital:

$$\text{Aze} = \text{Z}' + \text{R}$$

$$\text{Aze} = 47^\circ 57' 55'' + 0^\circ 00' 57,26''$$

$$\text{Aze} = 47^\circ 58' 52,26''$$

Utilizando-se a Equação 3, calculou-se o ângulo vertical:

$$\text{Av} = 90^\circ - \text{Aze}$$

$$\text{Av} = 90^\circ - 47^\circ 58' 52,26''$$

$$\text{Av} = 42^\circ 01' 7,74''$$

Partindo-se da Equação 7, calculou-se o ângulo de cálculo vertical (Acv):

$$\text{Acv} = \text{Av} \pm |\text{La}|$$

$\text{Acv} = 42^\circ 01' 7,74'' - 20^\circ$; latitude aproximada.

$$\text{Acv} = 22^\circ 01' 7,74''$$

Pela Equação 10, calculou-se a coordenada Y1:

$$\text{Y1} = \text{sen} (22^\circ 01' 7,74'')$$

$$\text{Y1} = 0,3749$$

Este procedimento foi feito para as três leituras, ou seja, como existem três leituras, obteve-se então três coordenadas (Y1, Y2 Y3).

Após todos os cálculos chegou-se aos seguintes pares de coordenadas planas (Tabela 2).

Tabela 2. Pares das coordenadas planas.

Observação.	X (m)	Y (m)
1	0,1815	0,3749
2	0,3200	0,2713
3	0,3713	0,1947

Feitos todos os cálculos, e posteriormente achando-se o centro, obteve-se uma circunferência com o seguinte centro (origem) como mostra a Tabela 3.

Tabela 3. Coordenada do centro da circunferência.

X (m)	0,0204
Y (m)	0,0152

Como o valor do centro da circunferência não foi satisfatório, foi preciso fazer iterações até que as coordenadas do centro se aproximassem de zero.

A Tabela 4 mostra as coordenadas planas após a primeira iteração.

Tabela 4. Novas coordenadas planas após uma iteração.

Observação.	X'(m)	Y'(m)
1	0,1614	0,3608
2	0,3006	0,2566
3	0,3523	0,1797

Após a primeira iteração, encontrou-se as novas coordenadas do centro, apresentadas na Tabela 5.

Tabela 5. Coordenada do centro da circunferência após uma iteração.

X'(m)	-0,0022
Y'(m)	-0,0028

A Figura 4 mostra a circunferência e seu centro, com uma iteração em relação à primeira sem iteração.

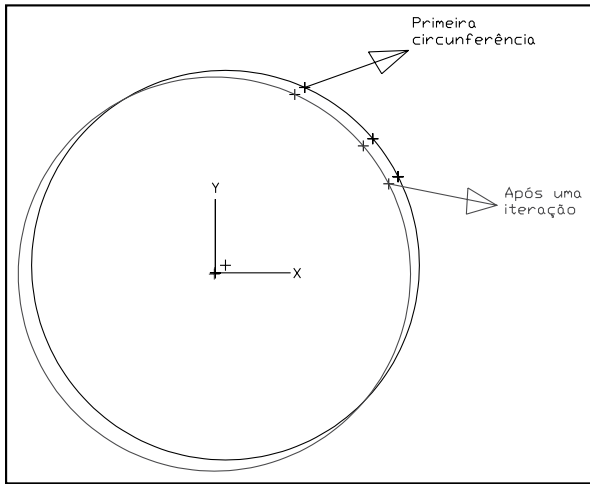


Figura 4. Após uma iteração o centro converge para origem.

Com mais uma iteração, apenas chegou-se a valores bem próximos de zero.

Dessa forma, não precisou mais recalcular os ângulos de cálculo vertical e horizontal, bastou achar o arco seno de X' e Y' e somar ao rumo e à latitude calculada, pois o sinal da coordenada do centro é quem vai determinar se vai somar ou subtrair.

Portanto, a latitude calculada ficou: $(20^\circ + \text{arco-seno}(0,0152) + \text{arco-seno}(-0,0028))$. Com isso, a latitude foi igual a $20^\circ 42' 37,8''$ S.

De forma análoga, a direção do pólo sul ficou sendo igual ao $(\text{arco-seno de}(0,0204) + \text{arco-seno}(-0,0022))$, e encontrou-se um rumo de $01^\circ 02' 34,31''$, em relação à referência adotada.

Para achar a direção do pólo norte bastou-se somar 180° à direção do pólo sul ou $181^\circ 02' 34,31''$ em relação à referência adotada.

CONCLUSÃO

O método apresentado demonstra-se aplicável para a determinação da coordenada astronômica (latitude) de um ponto, com a vantagem de utilizar conceitos e cálculos de geometria analítica simples e independe de dados do anuário, para a determinação da latitude e direção dos pólos, bem como da prévia escolha do astro.

Possibilita também, um desempenho mais rápido do profissional, já que o mesmo pode obter dados para a determinação da coordenada antes de um estudo prévio dos astros. Porém, não dispensa as informações do anuário astronômico para a determinação da longitude. Uma desvantagem deste método é que ele requer um intervalo de tempo grande para se obter uma boa precisão na determinação da coordenada.

Foi visto que é indispensável uma ótima referência para os ângulos vertical e horizontal, pois o método é muito sensível a erros.

Pode-se concluir ainda que o método apresentado é viável para a determinação da latitude e da direção dos pólos, pois os resultados encontrados foram satisfatórios.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ASTRONOMIA NO ZÊNITE. Disponível em <<http://www.zenite.nu>>; Acesso em: 08 ago. 2006.